ಮ.ಸಾ.ಅ ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಚರ್ಚೆ

ಮೂಲ: ಅಶೋಕ್ ಪ್ರಸಾದ್

ನಾನು: ಅಪೂರ್ವಿ ನಿನಗೆ ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬರುತ್ತಾ?

ಅಪೂರ್ವಿ: ಏನಣ್ಣ ಹೀಗ್ ಕೇಳ್ತಿಯಾ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನನಗೆ 5 ವಿಧಾನಗಳು ಗೊತ್ತು.

ನಾನು: ಐದು ವಿಧಾನಗಳಾ! ಅರೆ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಐದು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ ಅಂತ ನನಗೇ ಗೊತ್ತಿಲ್ವಲ್ಲ!

ಅಪೂರ್ವಿ: ಸರಿ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ವಿವರಿಸ್ತೀನಿ.
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಅವುಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಮಸಾಅ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮಸಾಅವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
ಉದಾ: 60= 2x2x3x5 ಮತ್ತು 24=2x2x2x3. ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಮೇಲೆ, ಮಸಾಅ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇವೆರಡರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 2x2x3=12.

ನಾನು: ಇದು ಮೊದಲ ವಿಧಾನ, ಮತ್ತಿದು ನನಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಏಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿನಗನ್ನಿಸುತ್ತದೆ? ಅಂದರೆ ಈ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ನೀನು ವಿವರಿಸಿದ ವಿಧಾನವು ಮಸಾಅ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಹೇಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತದೆ, ವಿವರಿಸುವೆಯಾ?

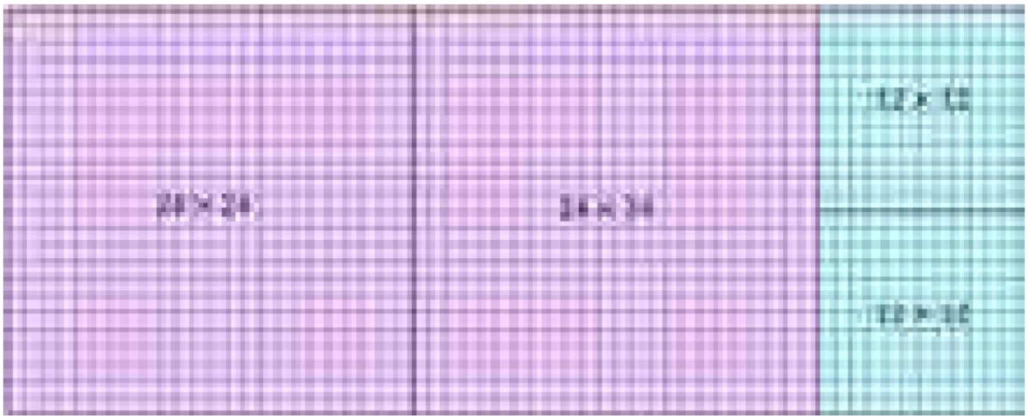
ಅಪೂರ್ವಿ: ತುಂಬಾ ಸರಳ ಅಣ್ಣ. ಇದರ ಉತ್ತರವು ಮಸಾಅ ಹೆಸರಲ್ಲೇ ಅಡಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಅವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಷ್ಟೇ.
ಈ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರೆದು ನಂತರ ಎರಡು (ಅಥವಾ ಎಲ್ಲ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಮಸಾಅ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಾನು: ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ವಿವರಣೆ! ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೇಳು.

ಅಪೂರ್ವಿ: ನಾವು 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ, 60ನ್ನು 24 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷ 12 ದೊರೆಯುವುದು. ಮುಂದುವರೆದು 24ನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 0 ಬರುವುದು. ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಈ ಹಂತದ ಭಾಜಕವೇ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಸಾಅ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಭಾಜಕ 12. ಹಾಗಾಗಿ 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 12.

ನಾನು: ಅದು ಸರಿ. ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಇದು. ಆದರೆ ನೀನು ಇನ್ನೂ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಬೇಕು.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಹಾ! ಸ್ವಲ್ಪ ತಾಳ್ಮೆಯಿರಲಿ ಅಣ್ಣ! ಐದೂ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನಾನು ತಿಳಿಸುವವಳಿದ್ದೀನಿ. ಮುಂದಿನ ವಿಧಾನ ಚೌಕಾಕಾರದ ಟೈಲ್ಸ್ (ನೆಲಹಾಸು) ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಚಿತ್ರ 1 ಅನ್ನು ಬರೆದು ವಿವರಿಸಿದಳು).



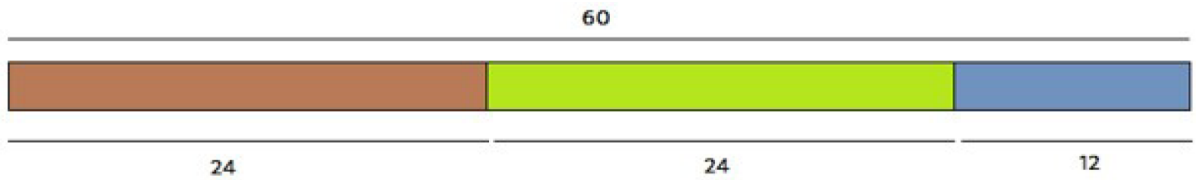
ಚಿತ್ರ 1. ಚೌಕಾಕಾರದ ಟೈಲ್ ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

60 ಮತ್ತು 24 ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ, 60x24 ಆಯಾಮಗಳಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈ ಆಯತವನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಾಕಾರಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ 24x24 ಚೌಕಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು ತೆಗೆದುಬಿಡೋಣ. ಈಗ ಉಳಿದ ಭಾಗ 24x12. ಇದರಲ್ಲಿ 12x12 ಆಯಾಮದ ಚೌಕಗಳನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು ತೆಗೆಯೋಣ. ಇದಾದ ನಂತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಯತ ಉಳಿಯಿತೆ? ಇಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ 60 ಮತ್ತು 24 ಮಸಾಅ 12.

(ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ವಿಧಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸದೆ, ಮೂರನೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಪೂರ್ವಿ ನವೀನ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದು ನನಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವೆನಿಸಿತು. ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸದೆ, ಮುಂದಿನ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಪೂರ್ವಿಯಿಂದ ಕೇಳಲು ನಾನು ಉತ್ಸುಕನಾದೆ.)

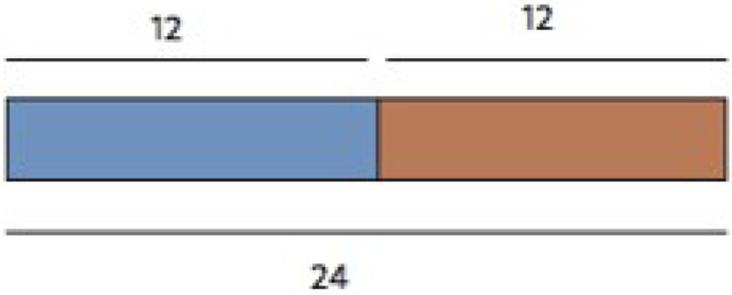
ನಾನು: ಎಷ್ಟು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ! ಮುಂದಿನ ವಿಧಾನ ಹೇಳು ಅಪೂರ್ವಿ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೂಡ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 2 ಅನ್ನು ಬರೆದಳು).



ಚಿತ್ರ 2. ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

60 ಮತ್ತು 24 ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮೊದಲು ಉದ್ದ 60 ಇರುವ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ನಂತರ, ಈ ಪಟ್ಟಿಯ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಇರುವ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು ಉದ್ದ 24 ಇರುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಉದ್ದ 60ರ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದ 24ರ ಎರಡು ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಉದ್ದ 12 ಇರುವ ಪಟ್ಟಿಯೊಂದು ಹಾಗೇ ಉಳಿದುಕೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಉದ್ದ 24 ಇರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದ 12 ಇರುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು (ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ). ಈಗ, ಉದ್ದ 12 ಇರುವ ಎರಡು ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಮೇಲೆ ಏನೂ ಉಳಿದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 12.



ಚಿತ್ರ 3. ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ನಾನು: ಅಪೂರ್ವಿ, ನೀನು ಈಗಾಗಲೇ ನನ್ನೊಂದಿಗೆ ಹಂಚಿಕೊಂಡ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು, ನಾಲ್ಕನೇ ವಿಧಾನ ಹೇಳು, ನೋಡೋಣ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಇತ್ತೀಚೆಗಷ್ಟೇ ನಾನು ಈ ವಿಧಾನದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿದ್ದು. ಇದರ ಹೆಸರು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದನಂತೆ. ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವವರೆಗಿನ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ, 60 ಮತ್ತು 24ರ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$60=(2\times 24)+12.$

ಶೇಷ 12 0 ಮತ್ತು 24 ನಡುವೆ ಇದೆ.

$24=(2\times 12)+0.$ ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 12.

ನಾನು: ಅಪೂರ್ವಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ನಿಲ್ಲು. ಇಲ್ಲೆರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ.

1. ನಿನ್ನದೇ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವೆಯಾ?
2. 60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ '2' ಯಾಕಾಗದು?

ಅಪೂರ್ವಿ: (ಸ್ವಲ್ಪ ಗೊಂದಲಗೊಂಡು, ಅಣ್ಣನ ಮೇಲೆ ದೂರುತ್ತಾ) ಅಲ್ಲ ಅಣ್ಣ, ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೂ ನನ್ನ ಪದಗಳಲ್ಲೇ ವಿವರಿಸಲು ಏಕೆ ಕೇಳುವೆ? ಈ ವಿಧಾನ ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ: a ಮತ್ತು b, $0<b\leq a$ ಷರತ್ತನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ನಾವು a ಅನ್ನು $a = q \times b + r$ ($o\leq r<b$) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ b ಭಾಜಕ, q ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು r ಶೇಷ. ಹಾಗೂ b ಮತ್ತು r ಋಣವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಒಂದು ವೇಳೆ $r=0$ ಆದಲ್ಲಿ a ಯು b ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗುವುದು. ಆಗ b, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಸಾಅ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ $r>0$ ಆದಾಗ, bಯನ್ನು rನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $b=r \times b1 + r1$ ($0\leq r1<b1$) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $r1>o$ ಇರುವಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವವರೆಗೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತೇವೆ. ಯಾವ ಭಾಜಕದಿಂದ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದೋ, ಅದನ್ನು a ಮತ್ತು b ಯ ಮಸಾಅ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾನು: ತುಂಬಾ ಸಂತೋಷ ಅಪೂರ್ವಿ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳು ನಿನಗೆ ತಿಳಿದಿರುವುದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸೋಜಿಗದ ವಿಷಯ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಾನಗಳೂ ವಿಭಿನ್ನವಾದವೇ ಎಂಬ ಅನುಮಾನವಿದೆ ನನಗೆ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಲು ನಾನು ನಿನಗೆ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ.

1. ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ್ಮಿಳಿತವಾಗಿರುವ ವಾದವೇನು? ಈ ವಿಧಾನಗಳು ಹೇಗೆ ಸರಿ? ಅಂದರೆ, ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು ಮಸಾಅವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತವೆ?
2. ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಅಪೂರ್ವಿ: ಅಣ್ಣಾ, ಇದು ಮೋಸ! ಉತ್ತರಗಳು ನಿನಗೇ ಗೊತ್ತು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ನನಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನೇ ನೀಡು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ನಿನ್ನ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಾನು ಉತ್ತರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವವರೆಗೂ, ಅವು ನನ್ನ ಕಾಡುತ್ತಿರುತ್ತವೆ.

ನಾನು: ಅಪೂರ್ವಿ, ಈಗ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ನನ್ನನ್ನೂ ಕೂಡಾ ಬಾಧಿಸುತ್ತಿವೆ ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ಮತ್ತು ಸಮಂಜಸವಾದ ಉತ್ತರಗಳು ನನ್ನ ಬಳಿ ಈಗ ಸಧ್ಯಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಯೋಚಿಸೋಣ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಸರಿ ಅಣ್ಣ ನಾನಿದರ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸಿಯೇ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ನಾನು ಶೀಘ್ರದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನನ್ನ ಮತ್ತು ಪೂರ್ವಿಯೊಡನೆ ನಡೆದ ಈ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ನಾನು ಮರೆತುಬಿಟ್ಟಿದ್ದೆ. ಆದರೆ, ಈ ಮಾತುಕತೆಯ ಫಲ ಕೆಲವು ದಿನಗಳ ಬಳಿಕ ನಮಗೆ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಒಂದು ಸಂಜೆ ನಾನು 'A Certain Ambiguity ಎಂಬ ಕಾದಂಬರಿ ಓದುತ್ತಾ, ಟೀ ಕುಡಿಯುತ್ತಿದ್ದೆ. ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗರ್ವಾಲಿ ಸಂಗೀತ ಕೇಳುತ್ತಿತ್ತು. ಅಪೂರ್ವಿ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕವೊಂದನ್ನು ಹಿಡಿದು ರೂಂ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದಳು. ಅವಳು ಬಹಳ ಸಂತೋಷವಾಗಿದ್ದಳು. ಅವಳು ನನ್ನೊಂದಿಗೆ ಯಾವುದೊ ಒಂದು ಹೊಸ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ ಎಂಬುದು ಅವಳ ಕಣ್ಣುಗಳಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಕಾಂತಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿತ್ತು.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಅಣ್ಣಾ, ಅಣ್ಣಾ! ನನಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ತು. ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ತು.

ನಾನು: (ಗೊಂದಲಗೊಂಡು) ಅಪೂರ್ವಿ, ಏನು ಸಿಕ್ತು ನಿನಗೆ? ಯಾವ ಉತ್ತರ?

ಅಪೂರ್ವಿ: ನಿನ್ನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳು.

ನಾನು: ಯಾವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಅಪೂರ್ವಿ?

ಅಪೂರ್ವಿ: ಕೆಲವು ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಮಸಾಅ ವಿಧಾನಗಳ ಮೇಲೆ ನಡೆಸಿದ ಚರ್ಚೆ ನೆನಪಿದ್ದೆವು ಮತ್ತು ಚರ್ಚೆಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀನು ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಿದ್ದೆ. ನೆನಪಿದೆಯೇ?

ನಾನು: ಏನು ಮಸಾಅದ ಮೇಲೆ ಮಾತುಕತೆಯೆ? ನನಗೇನೂ ನೆನಪಿಲ್ಲ. ಕೆಲವು ವಿವರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸು, ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಐದು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ನಾನು ನಿಮಗೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದೆ.

ನಾನು: ಹೌದು. ಈಗ ನೆನಪಿಗೆ ಬಂತು. ಆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ ನನಗೆ ನೆನಪಿವೆ. ಆದರೆ, ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಲಾಗಲಿಲ್ಲ. ಅದಿರಲಿ, ನಿನ್ನ ಉತ್ತರಗಳೇನು?

ಅಪೂರ್ವಿ: ಸರಿ ಅಣ್ಣಾ. ನಾನೀಗ ನಾನು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇನೆ. ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆದಾಗಿ ಅವೆಲ್ಲವೂ ವಿಭಿನ್ನವಾದ ವಿಧಾನಗಳೇನಲ್ಲ. ಮೊದಲನೆಯದು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೂ, ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳು ಗಣಿತದ ಒಂದೇ ವಾದದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಕಡೆಯ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿದೆ.

ನಾನು: ನಿಜವಾಗಿಯೂ! ಆ ಗಣಿತ ವಾದವೇನು? ಅದನ್ನು ಕೇಳುವ ಕುತೂಹಲ ನನಗೆ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಆ ವಾದವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೇ ಹೇಳುವ ಮೊದಲು, ಇವೆಲ್ಲವೂ ಯಾವುದರ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಕೊಂಡೆ ಎಂದು ಹೇಳುವೆ. ಮಸಾಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾನು ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಂಡೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕವು ಆ ಗಣಿತದ ವಾದವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಾನು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬುತ್ತಾ ಹೋದೆ. ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾನು ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರೆಸಿದೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನನ್ನ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ, ಅದು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ಬಂದ ಮಸಾಅ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ಬರುವ ಕೊನೆಯ ಭಾಜಕ ಇವೆರಡೂ ಸಮ ಎಂಬುದು. ಇದೇ ವಾದವನ್ನೇ ನಾವು ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸಿದ್ದು.

ನಾನು: ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಷದವಾಗಿ ಹೇಳುವೆಯಾ ಅಪೂರ್ವಿ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ಅಣ್ಣ ಸರಿ ಹಾಗಾದರೆ, ಒಂದಾದ ನಂತರ ಒಂದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಎರಡನೇ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ನಾವು 60ನ್ನು 24 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ನಾವು 60ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 24 ಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಿ, ಶೇಷ 12 ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು. 12 ಮತ್ತು 24ರ ಹಾಗೂ 24 ಮತ್ತು 60ರ ಮಸಾಅ ಒಂದೇ ಆದ್ದರಿಂದ, 24ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 12ಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಆಯತದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡ 60ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 24ಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಿ, ಮುಂದುವರೆದು 24ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 12ಗಳಿವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು. ಇದು 60ನ್ನು 24ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, 24ನ್ನು ಶೇಷ 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಸರಿಸಿದೆವು.

ನಾನು: ನೀನು ತುಂಬಾ ಜಾಣೆ! ಗಣಿತದ ವಾದದ ಮೂಲಕ್ಕೇ ಇಳಿದಿರುವೆ. ಈ ವಾದವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಂಬಬಹುದೆ?

ಅಪೂರ್ವಿ: ಇಲ್ಲ ಅಣ್ಣ. ನಾನು ಕೆಲವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಾದದ ಮೇಲೆ ನನಗೆ ಪೂರ್ಣ ನಂಬಿಕೆಯಿಲ್ಲ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೂ ಇದು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ಕಷ್ಟ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ನನಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡ್ತೀಯಾ ಅಣ್ಣಾ?

ನಾನು: ಸರಿ. ಆದರೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಮುನ್ನ ನಾನಿಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇನೆ. ನಿನಗೆ ಬೀಜಗಣಿತ ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೀಜಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೇನೆ.

ಅಪೂರ್ವಿ: ತುಂಬಾ ಥ್ಯಾಂಕ್ಸ್ ಅಣ್ಣ. ಈಗ ನನಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಯಿತು. ಮಸಾಅ ದಂತಹ ಚಿಕ್ಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಇಷ್ಟು ಅಗಾಧ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಒಳದೃಷ್ಟಿ ಹೊಂದಿರಬಹುದೆಂದು ನಾನು ಯೋಚಿಸಿಯೇ ಇರಲಿಲ್ಲ.

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು: ಲೇಖನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಾಲಂಗಳಿವೆ. ಮೊದಲ ಕಾಲಂನಲ್ಲಿ ವಾದಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಕಾಲಂನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಬೀಜಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ನಮ್ಮ ಸಲಹೆ. ಆದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸುವುದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತರವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಡಬೇಕು.

ಲೇಖಕರ ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಲೇಖಕರು ತಮ್ಮನ್ನು ಬರೆಯಲು ಹುರಿದುಂಬಿಸಿದ ಮತ್ತು ತಮ್ಮ ಬರವಣಿಗೆಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದ ಸ್ವಾತಿ ಸಿರ್ಕಾರ್ ರವರಿಗೆ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಅಶೋಕ್ ಪ್ರಸಾದ್ ರವರು ಅಜಿಮ್ ಪ್ರೇಮ್ ಜಿ ಫೌಂಡೇಶನ್ ನೊಂದಿಗೆ (ಪೌರಿ, ಉತ್ತರಾಖಂಡ) ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಹೇಂವತಿ ನಂದನ್ ಬಹುಗುಣ ಘರ್ವಾಲ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಗಣಿತಲ್ಲಿ ಎಂಎಸ್ಸಿ ಪದವಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಕಳೆದ ಹದಿನಾರು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದೊಂದಿದೆ ತೊಡಗಿದ್ದು, ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ವಯಸ್ಕರು ಇಬ್ಬರ ಜೊತೆಗೂ

ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದನ್ನು ಆನಂದಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಇಮೇಲ್ ವಿಳಾಸ ashok.prasad@azimpremjifoundation.org

Tables

ಪ್ರಯತ್ನ ಸಂಖ್ಯೆ	**ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b**	**ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು**	**ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು**	**a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಸಾಅ**	**a ಯನ್ನು ಚಿ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿವ ಶೇಷ**
1	60 ಮತ್ತು 24	2 x 2 x 3 x 5	2 x 2 x 2 x 3	12	12 = 60 - 2(24)
	24 ಮತ್ತು 12ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ	2 x 2 x 2 x 3	2 x 2 x 3	12	0 = 24 - 2(12)
2	56 ಮತ್ತು 16	2 x 2 x 2 x 7	2 x 2 x 2 x 2	8	8 = 56 -3(16)
	16 ಮತ್ತು 8ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ	2 x 2 x 2 x 2	2 x 2 x 2	8	0 = 16 - 2(8)
3	165 ಮತ್ತು 65	5 x 3 x 11	5 x 13	5	35 = 165 - 2(65)
	65 ಮತ್ತು 35ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ	5 x 13	5 x 7	5	30 = 65 - 1(35)
	35 ಮತ್ತು 30ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ	5 x 7	5 x 2 x 3	5	5 = 35 - 1(30)
	30 ಮತ್ತು 5ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ	5 x 2 x 3	5	5	0 = 30 - 6(5)

60 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 12 ಅಂದರೆ: 1.60 ಮತ್ತು 24 ಎರಡನ್ನೂ 12 ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.	a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಸಾಅ d ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ: , 1.d a ಮತ್ತು b ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$60 = 12 \times 5$ I $24=12 \times 2$ 2. 12 ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ i.e. 5 ಮತ್ತು 2 ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.	$a = d \times \alpha$ $b = d \times \beta$ 2.d, a ಮತ್ತು bಗಳ ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ i.e. α ಮತ್ತು β ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.
ಪೂರ್ಣಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ,ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 12 ಮತ್ತು 17 $17 = (1 \times 12) + 5$; ಇಲ್ಲಿ $0 \leq 5 < 12$ ಇಲ್ಲಿ 17ನ್ನು 12 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 5.	ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ $a = (q \times b) + r$. ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < b$. a ಅನ್ನು b ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿವ ಶೇಷ r
$60=(2 \times 24) + 12$ ಆದ್ದರಿಂದ $12 = 60 - (2 \times 24)$ $=(12x5)-(2x2x12)$ $=12[5-(2x2)]$	$a = q \times b + r$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $r = a - qb$ $= d\alpha - qd\beta$ $= d(\alpha - q\beta)$
ಆದ್ದರಿಂದ 12, 60 ಮತ್ತು 24ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, 12ನ್ನೂ ಸಹ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.	ಆದ್ದರಿಂದ d, a ಮತ್ತು bಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, r ಅನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
ಈಗ ನಾವು 24 ಮತ್ತು 12ರ ಮಸಾಅ 12 ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಿದೆ. 12 24 ಮತ್ತು 12 ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಈಗ 12 ಅವುಗಳ ಮಹತ್ತರ ಭಾಜಕ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.	ಈಗ ನಾವು b ಮತ್ತು r ಗಳ ಮಸಾಅ d ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. d, b ಮತ್ತು rಗಳ ಭಾಜಕ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಈಗ d ಅವುಗಳ ಮಹತ್ತರ ಭಾಜಕ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.
$24 = 12 \times 2$ $12 = 12 \times 1$ 1ಮತ್ತು 2 ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ 12 ಮತ್ತು 24 ರ ಮಸಾಅ 12.	$b = d\beta$ $r = d(\alpha - q\beta)$ ಈಗ β ಮತ್ತು $(\alpha - q\beta)$ ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಮಾತ್ರ d, b ಮತ್ತು rಗಳ ಮಸಾಅ ಆಗುತ್ತದೆ.
	ಒಂದು ವೇಳೆ, β ಮತ್ತು $(\alpha - q\beta)$ ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಲ್ಲ ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, β ಮತ್ತು (α -

	qβ) ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ c ಇರುತ್ತದೆ. ಚಿಹ್ನೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ, c|β c|(α - qβ) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.
	ಈಗ, α = {qβ + (α - qβ)} ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. c, qβ ಮತ್ತು (α - qβ) ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ, c α ಅನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
	ಆದ್ದರಿಂದ c, α ಮತ್ತು β ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ α ಮತ್ತು β ಎರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಇದು ನಿಜವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದರ ಅರ್ಥ c, β ಮತ್ತು (α - qβ) ಎರಡನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಭಾವನೆ ತಪ್ಪು. ಇದರಿಂದ β ಮತ್ತು (α - qβ) ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದು ದಿಟವಾಗುತ್ತದೆ. β ಮತ್ತು (α - qβ) ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ d, b ಮತ್ತು rನ ಮಸಾಅ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೇ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಹೋದರೆ, a ಮತ್ತು bಗಳ ಮಸಾಅ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಶೇಷಗಳ ಮಸಾಅ ಕೂಡ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.